

综合复习（二）

一、旋转

1. 旋转的性质

1、旋转三要素：① 旋转中心 ② 旋转方向 ③ 旋转角

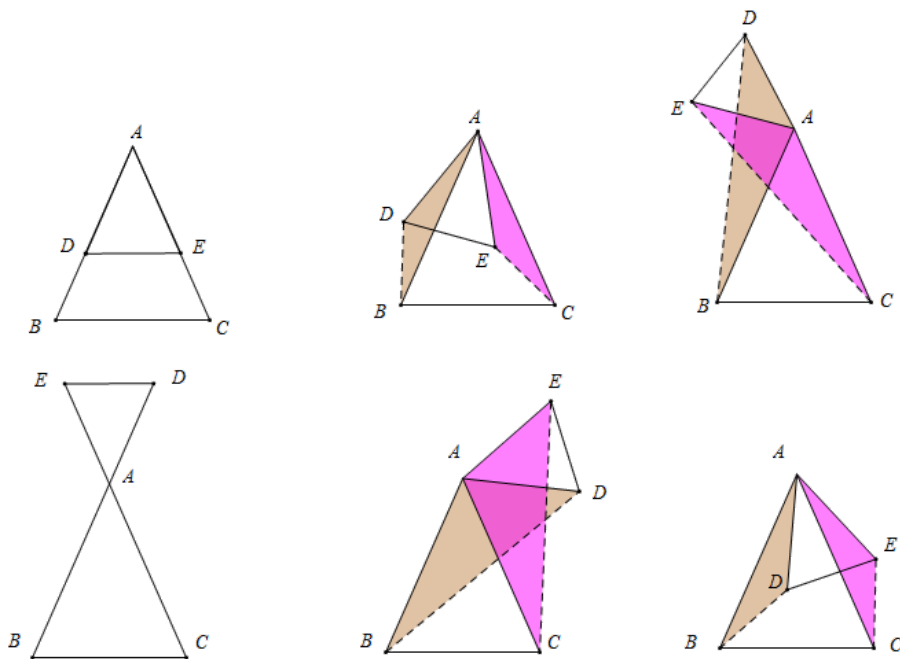
2、旋转性质：①对应点到旋转中心的距离 相等 。

②对应点与旋转中心所连线段的夹角都等于 旋转角 。

③旋转前后图形 全等 。

2. 手拉手模型

已知等腰 $\triangle ABC$ ， $AB = AC$ ，过 AB 边上的一点 D 作 BC 边的平行线 DE 交 AC 于 E ，将 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转一周。



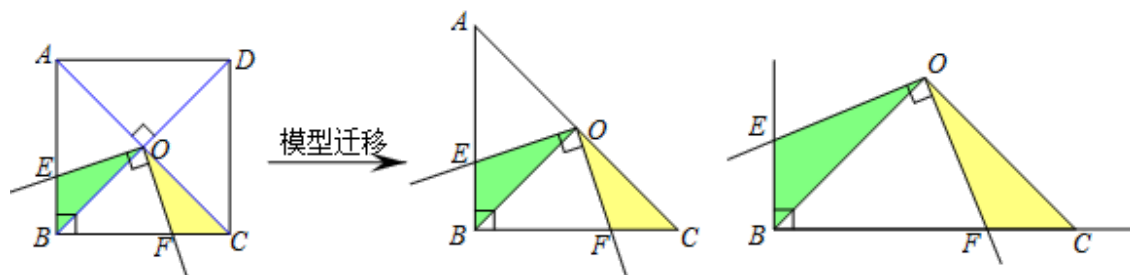
依题可知：由 A 点引发了两个共顶点的等腰三角形，大手 $AB = AC$ ，小手 $AD = AE$ ，大手拉小手，通过“**SAS**”可以证明 $\triangle ABD \cong \triangle ACE$ 。

！结论：无论旋转多少度，1、 $BD = CE$ ，

2、 BD 、 CE 所形成的夹角有一角等于 $\angle BAC$ 。

3. 对角互补模型

如图，正方形 $ABCD$ ，对角线 AC 、 BD 交于点 O ， $\angle EOF = 90^\circ$ ，与正方形的两边分别交于点 E 、 F



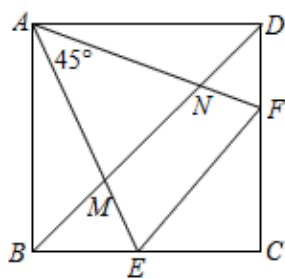
! 结论：① $\triangle BOE \cong \triangle COF$ ， $\triangle AOE \cong \triangle BOF$ 。

② $OE = OF$ ， $EF = \sqrt{2}OE$ 。

③ $S_{\text{四边形}OEBF} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形}ABCD}$ 。

4. 角含半角模型

已知正方形 $ABCD$ ， $\angle EAF = 45^\circ$ 。



【结论】

① $EF = BE + DF$ ；

② $MN^2 = BM^2 + DN^2$ ；

③ AE 平分 $\angle BEF$ ， AF 平分 $\angle DFE$ ；

④ 点 A 到 EF 的距离 = AB 。

栗子

1. 下列图形中，是轴对称图形而不是中心对称图形的是（ ）。

A.



B.



C.



D.



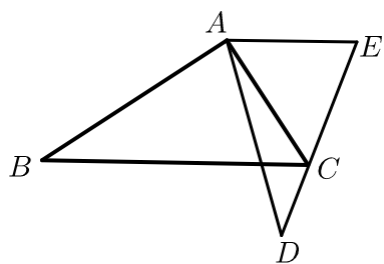
【答案】C

【解析】A、B、C、D四个选项均为轴对称图形，但C不是中心对称图形。

故选C。

【标注】【知识点】判断轴对称图形和中心对称图形

2. 如图，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转一定角度，得到 $\triangle ADE$ ，此时点 C' 恰好在线段 DE 上，若 $\angle B = 40^\circ$ ， $\angle CAE = 60^\circ$ ，则 $\angle DAC$ 的度数为（ ）。



A. 15°

B. 20°

C. 25°

D. 30°

【答案】 B

【解析】 $\therefore$ 将 $\triangle ABC$ 绕点 A 逆时针旋转一定角度，得到 $\triangle ADE$ ，

$$\therefore \angle D = \angle B = 40^\circ, AE = AC,$$

$$\therefore \angle CAE = 60^\circ,$$

$\therefore \triangle ACE$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle ACE = \angle E = 60^\circ,$$

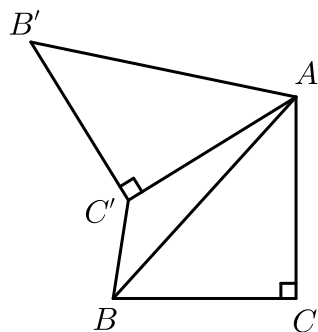
$\therefore \angle ACE$ 是 $\triangle ACD$ 的外角，

$$\therefore \angle DAC = \angle ACE - \angle D = 60^\circ - 40^\circ = 20^\circ.$$

故选 B.

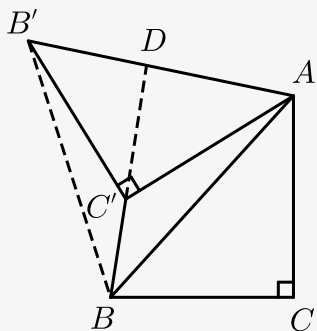
【标注】 【知识点】 旋转的性质

3. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle C = 90^\circ$ ， $AC = BC = \sqrt{2}$ ，将 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 到 $\triangle AB'C'$ 的位置，连接 $C'B$ ，则 $C'B = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】 $\sqrt{3} - 1$

【解析】 如图，连接 BB' ，



$\therefore \triangle ABC$ 绕点 A 顺时针方向旋转 60° 得到 $\triangle AB'C'$,

$\therefore AB = AB'$, $\angle BAB' = 60^\circ$,

$\therefore \triangle ABB'$ 是等边三角形 ,

$\therefore AB = BB'$,

在 $\triangle ABC'$ 和 $\triangle B'BC'$ 中 ,

$$\begin{cases} AB = BB' \\ AC' = B'C' \\ BC' = BC' \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC' \cong \triangle B'BC'$ (SSS) ,

$\therefore \angle ABC' = \angle B'BC'$,

延长 BC' 交 AB' 于 D ,

则 $BD \perp AB'$,

$\therefore \angle C = 90^\circ$, $AC = BC = \sqrt{2}$,

$\therefore AB = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = 2$,

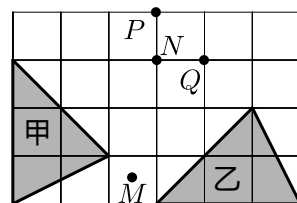
$\therefore BD = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$,

$C'D = \frac{1}{2} \times 2 = 1$,

$\therefore BC' = BD - C'D = \sqrt{3} - 1$.

【标注】【知识点】利用旋转求线段长

4. 如图 , 在 6×4 方格纸中 , 格点三角形甲经过旋转后得到格点三角形乙 , 则其旋转中心是 () .



A. 格点 M

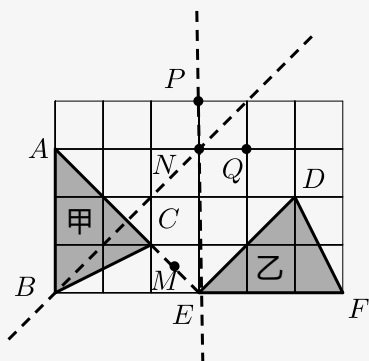
B. 格点 N

C. 格点 P

D. 格点 Q

【答案】 B

【解析】 $\because \triangle ABC$ 经过旋转后得到 $\triangle EFD$ ，



$\therefore$ 点 A 与点 E 为对应点，点 B 和点 F 为对应点，

$\therefore$ 旋转中心在 AE 的垂直平分线上，也在 BF 的垂直平分线上，

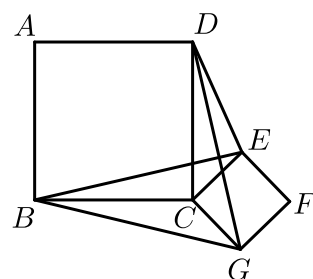
作 AE 的垂直平分线和 BF 的垂直平分线，它们的交点为 N 点，如图，即旋转中心为 N 点。

故选 **B**。

【标注】【知识点】确定旋转中心

栗子

5. 如图，正方形 $ABCD$ 和正方形 $CEFG$ 边长分别为 a 和 b ，正方形 $CEFG$ 绕点 C 旋转，给出下列结论：① $BE = DG$ ；② $BE \perp DG$ ；③ $DE^2 + BG^2 = 2a^2 + 2b^2$ ，其中正确结论是 _____（填序号）



【答案】①②③

【解析】设 BE ， DG 交于 O ，

$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 和 $CEFG$ 都为正方形，

$\therefore BC = CD$ ， $CE = CG$ ， $\angle BCD = \angle ECG = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle BCD + \angle DCE = \angle ECG + \angle DCE = 90^\circ + \angle DCE$ ，即 $\angle BCE = \angle DCG$ ，

在 $\triangle BCE$ 和 $\triangle DCG$ 中，

$$\begin{cases} BC = DC \\ \angle BCE = \angle DCG, \\ CE = CG \end{cases}$$

$\therefore \triangle BCE \cong \triangle DCG (\text{SAS})$,

$\therefore BE = DG$,

$\therefore \angle 1 = \angle 2$,

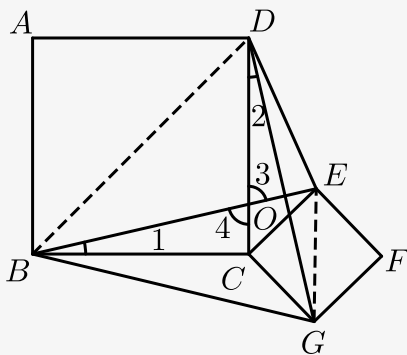
$\therefore \angle 1 + \angle 4 = \angle 3 + \angle 1 = 90^\circ$,

$\therefore \angle 2 + \angle 3 = 90^\circ$,

$\therefore \angle BOG = 90^\circ$,

$\therefore BE \perp DG$; 故①②正确.

连接 BD , EG , 如图所示,



$$\therefore DO^2 + BO^2 = BD^2 = BC^2 + CD^2 = 2a^2,$$

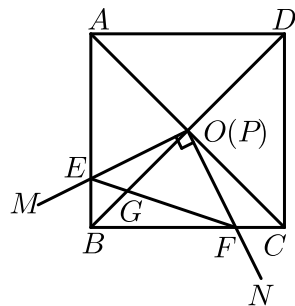
$$EO^2 + OG^2 = EG^2 = CG^2 + CE^2 = 2b^2,$$

则 $BG^2 + DE^2 = DO^2 + BO^2 + EO^2 + OG^2 = 2a^2 + 2b^2$, 故③正确.

【标注】【知识点】正方形等其他图形的手拉手模型

栗子

6. 如图, 边长为1的正方形 $ABCD$ 有对角线 AC 、 BD 相交于 O , 有直角 $\angle MPN$, 使直角顶点 P 与点 O 重合, 直角边 PM 、 PN 分别与 OA 、 OB 重合, 然后逆时针旋转, 旋转角为 $\theta (0^\circ < \theta < 90^\circ)$, PM 、 PN 分别交 AB 、 BC 于 E 、 F 两点, 连接 EF 交 OB 于点 G .



(1) 求四边形 $OEBF$ 的面积.

(2) 若 $OG \cdot OB = \frac{1}{3}$, 求 EF 的长.

(3) 在旋转过程中, 当 $\triangle BEF$ 与 $\triangle COF$ 的面积之和最大时, 求 AE 的长.

【答案】(1) $\frac{1}{4}$.

(2) $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

(3) $\frac{1}{4}$.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 是正方形,

$$\therefore OB = OC, \angle OBE = \angle OCF = 45^\circ, \angle BOC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle COF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle EOF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOF + \angle BOE = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BOE = \angle COF,$$

在 $\triangle BOE$ 和 $\triangle COF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BOE = \angle COF \\ OB = OC \\ \angle OBE = \angle OCF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle BOE \cong \triangle COF (\text{ASA}),$$

$$\therefore S_{\text{四边形} OEBF} = S_{\triangle BOF} + S_{\triangle BOE}$$

$$= S_{\triangle BOF} + S_{\triangle COF}$$

$$= S_{\triangle BOC} = \frac{1}{4} S_{\text{正方形} ABCD}$$

$$= \frac{1}{4} \times 1 \times 1 = \frac{1}{4},$$

故答案为: $\frac{1}{4}$.

$$(2) \because \angle EOG = \angle BOE, \angle OEG = \angle OBE = 45^\circ,$$

$$\therefore \triangle OEG \sim \triangle OBE,$$

$$\therefore OE : OB = OG : OE,$$

$$\therefore OG \cdot OB = OE^2,$$

由 (1) 得: $OE = OF$,

$$\therefore \text{在 Rt} \triangle EOF \text{ 中, } OE^2 + OF^2 = EF^2,$$

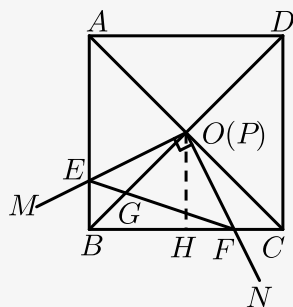
$$\therefore 2OE^2 = EF^2, OE^2 = \frac{1}{2} EF^2,$$

$$\therefore OG \cdot OB = OE^2 = \frac{1}{2} EF^2 = \frac{1}{3},$$

$$\therefore EF^2 = \frac{2}{3}, EF = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

$$\therefore EF \text{ 的长为 } \frac{\sqrt{6}}{3}.$$

(3) 如图, 过点 O 作 $OH \perp BC$,



$$\because BC = 1,$$

$$\therefore OH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2},$$

$$\text{设 } AE = x, \text{ 则 } BE = CF = 1 - x, BF = x,$$

$$\therefore S_{\triangle BEF} + S_{\triangle COF} = \frac{1}{2}BE \cdot BF + \frac{1}{2}CF \cdot OH$$

$$= \frac{1}{2}x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x) \times \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{32},$$

$$\because a = -\frac{1}{2} < 0,$$

$$\therefore \text{当 } x = \frac{1}{4} \text{ 时, } S_{\triangle BEF} + S_{\triangle COF} \text{ 最大,}$$

$$\text{即在旋转过程中, 当 } \triangle BEF \text{ 与 } \triangle COF \text{ 的面积之和最大时, } AE = \frac{1}{4},$$

$$\text{故答案为: } \frac{1}{4}.$$

【标注】【知识点】对角互补模型

栗子

7. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AB = AC$, $\angle BAC = 90^\circ$, $\angle B = \angle ACB = 45^\circ$, D 、 E 是斜边 BC 上两点, 且 $\angle DAE = 45^\circ$, 过点 A 作 $AF \perp AD$, 垂足是 A , 过点 C 作 $CF \perp BC$, 垂足是 C . 交 AF 于点 F , 连接 EF , 下列结论:

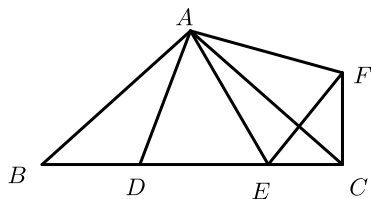
① $\triangle ABD \cong \triangle ACF$;

② $DE = EF$;

③ 若 $S_{\triangle ADE} = 10$, $S_{\triangle CEF} = 4$. 则 $S_{\triangle ABC} = 24$;

④ $BD + CE = DE$.

其中正确的有 () 个.



【答案】 B

【解析】 $\because AF \perp AD, CF \perp BC, \angle BAC = 90^\circ,$

$$\therefore \angle DAF = \angle ECF = \angle BAC = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAF - \angle DAC,$$

$$\text{即 } \angle BAD = \angle CAF,$$

$$\because \angle B = \angle ACB = 45^\circ, \angle ECF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle ACF = \angle ECF - \angle ACB = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle B = \angle ACF,$$

在 $\triangle ABD$ 和 $\triangle ACF$ 中,

$$\begin{cases} \angle BAD = \angle CAF \\ AB = AC \\ \angle B = \angle ACF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACF (\text{ASA}), \text{ 故①正确};$$

$$\therefore BD = CF, AD = AF,$$

$$\because \angle DAE = 45^\circ, \angle DAF = 90^\circ,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle DAF - \angle DAE = 45^\circ,$$

$$\therefore \angle FAE = \angle DAE,$$

在 $\triangle ADE$ 和 $\triangle AFE$ 中,

$$\begin{cases} AD = AF \\ \angle DAE = \angle FAE \\ AE = AE \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle AFE (\text{SAS}),$$

$$\therefore DE = FE, \text{ 故②正确};$$

$$\text{在 Rt}\triangle CEF \text{ 中 } CE + CF > EF,$$

$$\therefore CE + BD > DE, \text{ 故④错误};$$

$$\because \triangle ABD \cong \triangle ACF, \triangle ADE \cong \triangle AFE,$$

$$\therefore S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ACF}, S_{\triangle ADE} = S_{\triangle AFE} = 10,$$

$$\therefore S_{\triangle CEF} = 4,$$

$$\therefore S_{\triangle ADE} + S_{\triangle AFE} + S_{\triangle CEF} = S_{\triangle ADE} + S_{\triangle AEC} + S_{\triangle ACF}$$

$$= S_{\triangle ADE} + S_{\triangle AEC} + S_{\triangle ABD}$$

$$= S_{\triangle ABC}$$

$$= 24, \text{ 故③正确}.$$

综上①②③正确.

故选B.

【标注】【知识点】等腰直角三角形与全等

二、圆

1. 垂径定理

垂径定理：垂直于弦的直径平分 弦，并且平分弦所对的 两条弧。

垂径定理推论：平分弦（不是直径）的直径 垂直 于弦，并且 平分 弦所对的两条弧。

2. 圆周角定理

圆周角定理：在同圆或等圆中，同弧或等弧所对的 圆周角 等于这条弧所对的 圆心角的一半。

圆内接四边形的性质：圆的内接四边形 对角互补。

3. 圆的切线

切线的判定定理：经过 半径 的外端并且 垂直 于这条半径的直线是圆的切线。

证明一条直线是圆的切线有两个思路：①若给出直线与圆有公共点：连半径、证垂直；

②若没给直线与圆的交点：作垂直、证半径。

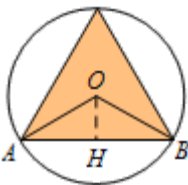
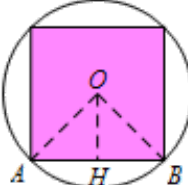
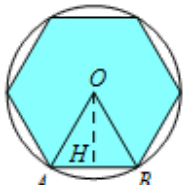
切线性质定理：圆的切线 垂直 于过切点的半径。

推论1：经过圆心且垂直于切线的直线必经过 切点。

推论2：经过切点且垂直于切线的直线必经过 圆心。

切线长定理：从圆外一点可以引圆的两条切线，它们的 切线长相等，这一点和圆心的连线 平分 两条切线的夹角。

4. 与圆有关的计算

	正三角形	正方形	正六边形
图形			
边心距：半径：边长	1 : 2 : 2√3	1 : √2 : 2	√3 : 2 : 2

弧长公式： $l = \frac{n\pi R}{180}$ （ n 为圆心角的度数， R 为圆的半径）。

扇形面积公式： $S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360}$.

利用扇形的弧长的计算公式有：

$$S_{\text{扇形}} = \frac{n\pi R^2}{360} = \frac{1}{2} \times \frac{n\pi R}{180} \times R = \frac{1}{2} lR . \quad (l \text{ 是这个扇形的弧长})$$

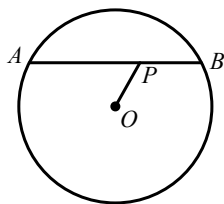
$$\text{圆锥的侧面积为 } S_{\text{侧}} = \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l = \pi rl ,$$

$$\text{圆锥的全面积为 } S_{\text{全}} = S_{\text{侧}} + S_{\text{底}} = \pi rl + \pi r^2 = \pi r(l + r) .$$

设这个展开的扇形圆心角为 n° , 圆锥的侧面积还可以表示为 $S_{\text{侧}} = \frac{n\pi l^2}{360}$.

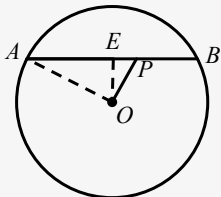
栗子

8. 如图, AB 为 $\odot O$ 的弦, P 为 AB 上一点, 且 $PA = 8$, $PB = 6$, $OP = 4$, 则 $\odot O$ 的半径为 _____ .



【答案】 8

【解析】 过 O 作 $OE \perp AB$, 垂足为 E , 连接 OA ,



$$\because PA = 8, PB = 6,$$

$$\therefore AE = 12AB = 7PE = BE - PB = 7 - 6 = 1,$$

$$\text{在 Rt}\triangle POE \text{ 中}, OE = \sqrt{OP^2 - PE^2} = \sqrt{4^2 - 1^2} = \sqrt{15},$$

$$\text{在 Rt}\triangle AOE \text{ 中}, OA = \sqrt{AE^2 + OE^2} = \sqrt{7^2 + (\sqrt{15})^2} = 8.$$

故答案为：8 .

【标注】 【知识点】 勾股定理

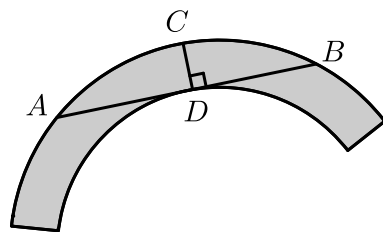
【知识点】 圆中对称性

【知识点】 垂径定理以及应用

【能力】 运算能力

9.

如图是一个圆环形黄花梨木摆件的残片，为求其外圆的半径，小林在外圆上任取一点 A ，然后过点 A 作 AB 与残片的内圆相切于点 D ，作 $CD \perp AB$ 交外圆于点 C ，测得 $CD = 15\text{cm}$ ， $AB = 60\text{cm}$ ，则这个摆件的外圆半径是 _____ cm 。



【答案】 37.5

【解析】 如图，设点 O 为外圆的圆心，连接 OA 和 OC ，

$$\because CD = 15\text{cm}, AB = 60\text{cm},$$

$$\because CD \perp AB,$$

$$\therefore OC \perp AB,$$

$$\therefore AD = \frac{1}{2}AB = 30\text{cm},$$

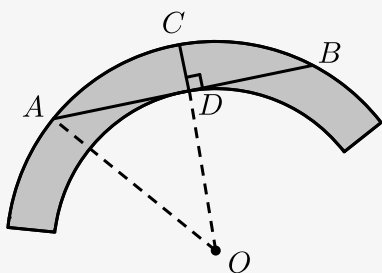
$$\therefore \text{设半径为 } r\text{cm}, \text{ 则 } OD = (R - 15)\text{cm},$$

$$\text{根据题意得: } r^2 = (r - 15)^2 + 30^2,$$

$$\text{解得: } r = 37.5.$$

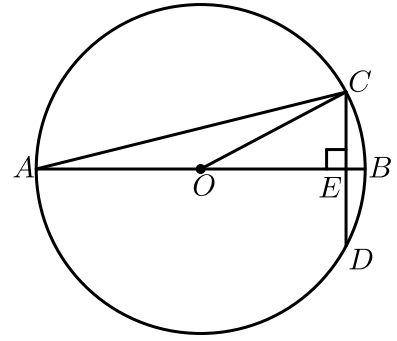
$$\therefore \text{这个摆件的外圆半径长为 } 37.5\text{cm}.$$

故答案为：37.5。



【标注】【知识点】垂径定理以及应用

10. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径，弦 $CD \perp AB$ 于点 E ，如果 $\angle A = 15^\circ$ ，弦 $CD = 4$ ，那么 AB 的长是 _____。



【答案】 8

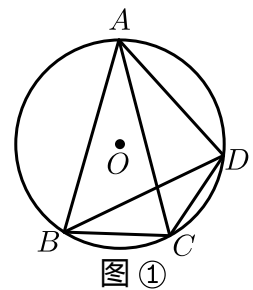
【解析】 由已知得 $\angle BOC = 2\angle CAB = 30^\circ$,
 $\because AB$ 为 $\odot O$ 直径 , $CD \perp AB$, 且 $CD = 4$,
 $\therefore CE = \frac{1}{2}CD = 2$,
 在 $\text{Rt}\triangle COE$ 中 ,
 $OC = 2CE = 4$,
 $\therefore AB = 2OC = 8$.

【标注】 【知识点】 垂径定理的推论以及应用

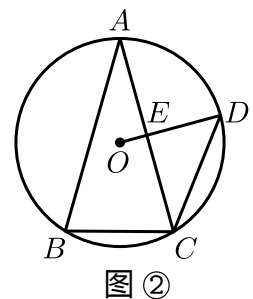
栗子

11. 已知 $\triangle ABC$ 内接于 $\odot O$, $AB = AC$, $\angle ABC = 75^\circ$, D 是 $\odot O$ 上的点 .

(1) 如图① , 求 $\angle ADC$ 和 $\angle BDC$ 的大小 .



(2) 如图② , $OD \perp AC$, 垂足为 E , 求 $\angle ODC$ 的大小 .



【答案】(1) $\angle ADC = 105^\circ$, $\angle BDC = 30^\circ$.

(2) $\angle ODC = 52.5^\circ$.

【解析】(1) $\because$ 四边形 $ABCD$ 为圆内接四边形 ,

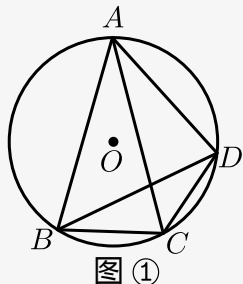


图 ①

$$\therefore \angle ABC + \angle ADC = 180^\circ ,$$

$$\therefore \angle ADC = 180^\circ - 75^\circ = 105^\circ ,$$

$$\because AB = AC ,$$

$$\therefore \angle ABC = \angle ACB = 75^\circ ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle ABC - \angle ACB = 30^\circ ,$$

$$\therefore \angle BDC = \angle BAC ,$$

$$\therefore \angle BDC = 30^\circ .$$

(2) 连接 OC 、 OA ,

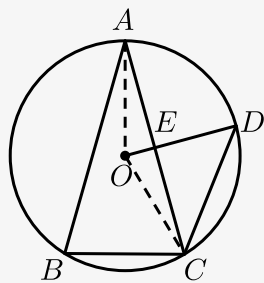


图 ②

$$\because \angle ABC = 75^\circ ,$$

$$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC = 2 \times 75^\circ = 150^\circ ,$$

$$\text{又} \because OD \perp AC ,$$

$$\therefore \angle DOC = \frac{1}{2} \angle AOC = 75^\circ ,$$

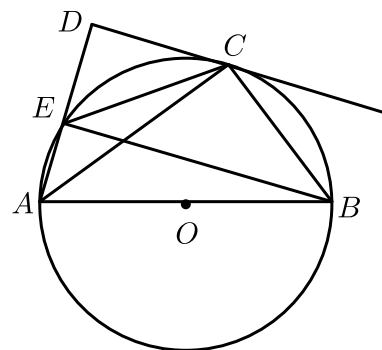
$$\text{又} \because OD = OC ,$$

$$\therefore \angle OCD = \angle ODC ,$$

$$\therefore \angle ODC = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - \angle DOC) = \frac{1}{2} \cdot (180^\circ - 75^\circ) = 52.5^\circ .$$

【标注】【知识点】圆内接四边形综合

12. 如图， AB 是 $\odot O$ 的直径， CD 切 $\odot O$ 于点 C ， AD 交 $\odot O$ 于点 E ， AC 平分 $\angle BAD$ ，连接 BE 。



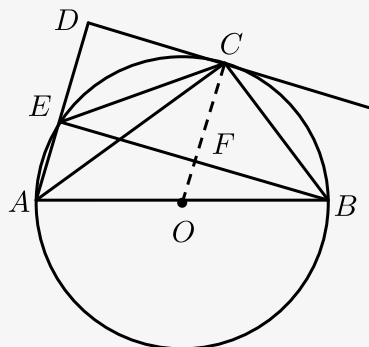
(1) 求证： $CD \perp ED$ 。

(2) 若 $CD = 4$ ， $AE = 2$ ，求 $\odot O$ 的半径。

【答案】 (1) 证明见解析。

(2) $\sqrt{17}$ 。

【解析】 (1) 连接 OC ，交 BE 于 F ，由 DC 是切线得 $OC \perp DC$ ；



又 $\because OA = OC$ ，

$\therefore \angle OAC = \angle OCA$ ，

$\because \angle DAC = \angle OAC$ ，

$\therefore \angle OCA = \angle DAC$ ，

$\therefore OC \parallel AD$ ，

$\therefore \angle D = \angle OCD = 90^\circ$

即 $CD \perp ED$ 。

(2) $\because AB$ 是 $\odot O$ 的直径，

$\therefore \angle AEB = 90^\circ$ ，

$\because \angle D = 90^\circ$ ，

$\therefore \angle AEB = \angle D$ ，

$\therefore BE \parallel CD$ ，

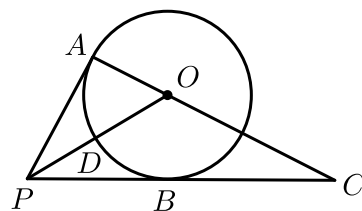
$\because OC \perp CD$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore OC \perp BE, \\
&\therefore EF = BF, \\
&\therefore OC \parallel ED, \\
&\therefore \text{四边形} EFCD \text{是矩形}, \\
&\therefore EF = CD = 4, \\
&\therefore BE = 8, \\
&\therefore AB = \sqrt{AE^2 + BE^2} = \sqrt{2^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}, \\
&\therefore \odot O \text{的半径为} \sqrt{17}.
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】垂径定理以及应用

【知识点】切线的判定定理

13. 如图， PA 、 PB 是 $\odot O$ 的切线， A 、 B 为切点，连接 AO 并延长，交 PB 的延长线于点 C ，连接 PO ，交 $\odot O$ 于点 D 。



- (1) 求证： $\angle APO = \angle CPO$ 。
 (2) 若 $\odot O$ 的半径为3， $OP = 6$ ， $\angle C = 30^\circ$ ，求 PC 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

(2) $6\sqrt{3}$ 。

【解析】(1) $\because PA$ 、 PB 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore \angle APO = \angle CPO.$$

(2) $\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore \angle PAC = 90^\circ,$$

$$\therefore AP = \sqrt{OP^2 - OA^2} = 3\sqrt{3},$$

在 $\text{Rt}\triangle CAP$ 中， $\angle C = 30^\circ$ ，

$$\therefore PC = 2AP = 6\sqrt{3}.$$

【标注】【知识点】圆与勾股

14. 若正方形的边长为6, 则其外接圆半径与内切圆半径的大小分别为 () .

- A. 6, $3\sqrt{2}$ B. $3\sqrt{2}$, 3 C. 6, 3 D. $6\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$

【答案】B

【解析】∵正方形的边长为6,

$$\therefore AB = 3,$$

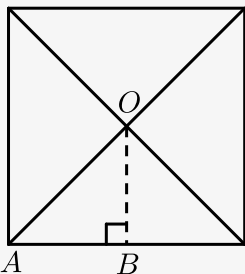
$$\text{又} \because \angle AOB = 45^\circ,$$

$$\therefore OB = 3,$$

∴

$$AO = \sqrt{3^2 + 3^2} = 3\sqrt{2},$$

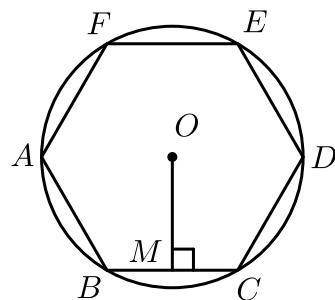
即外接圆半径为 $3\sqrt{2}$, 内切圆半径为3.



【标注】【知识点】正多边形与圆的综合

15. 如图, 正六边形 $ABCDEF$ 内接于 $\odot O$, 半径为4, 则这个正六边形的边心距 OM 和 $\widehat{BC}$ 的长分别为 () .

- A. 2, $\frac{\pi}{3}$ B. $2\sqrt{3}$, π C. $\sqrt{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ D. $2\sqrt{3}$, $\frac{4\pi}{3}$



【答案】D

【解析】连接 OB ,

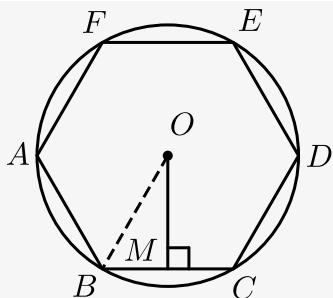
$$\therefore OB = 4,$$

$$\therefore BM = 2,$$

$$\therefore OM = 2\sqrt{3},$$

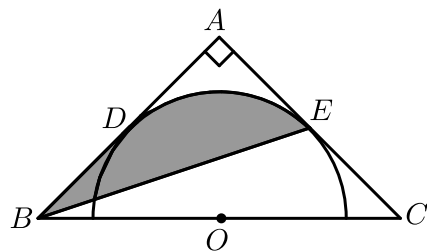
$$\widehat{BC} = \frac{60^\circ \times \pi \times 4}{180^\circ} = \frac{4\pi}{3},$$

故选D.



【标注】【知识点】圆内接正多边形相关计算

16. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ，点 O 是边 BC 的中点，半圆 O 与 $\triangle ABC$ 相切于点 D 、 E ，则阴影部分的面积等于（ ）。



A. $1 - \frac{\pi}{4}$

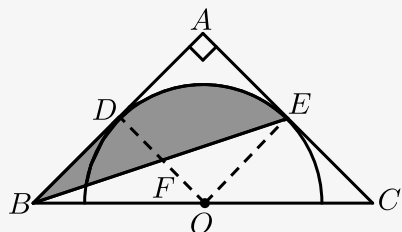
B. $\frac{\pi}{4}$

C. $1 - \frac{\pi}{8}$

D. $\frac{\pi}{8}$

【答案】B

【解析】连接 OD ， OE ，



$\because$ 半圆 O 与 $\triangle ABC$ 相切于点 D 、 E ，

$\therefore OD \perp AB$ ， $OE \perp AC$ ，

$\because$ 在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A = 90^\circ$ ， $AB = AC = 2$ ，

$\therefore$ 四边形 $ADOE$ 是正方形， $\triangle OBD$ 和 $\triangle OCE$ 是等腰直角三角形， $\therefore$

$OD = OE = AD = BD = AE = EC = 1$ ，

$\therefore \angle ABC = \angle EOC = 45^\circ$ ，

$\therefore AB \parallel OE$ ，

$\therefore \angle DBP = \angle OEF$ ，

在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle EOF$ 中，

$$\begin{cases} \angle DBF = \angle OEF \\ \angle BFD = \angle EFO, \\ BD = OE \end{cases}$$

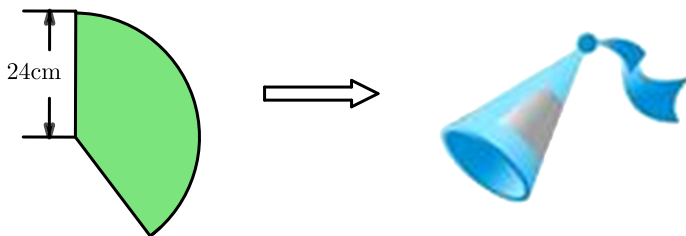
$$\therefore \triangle BDF \cong \triangle EOF (\text{AAS}),$$

$$\therefore S_{\text{阴影}} = S_{\text{扇形} DOE} = \frac{90}{360} \times \pi \times 1^2 = \frac{\pi}{4}.$$

故选B.

【标注】【知识点】扇形的面积公式

17. 小刚用一张半径为24cm的扇形纸板做一个如图所示的圆锥形小丑帽子侧面（接缝忽略不计），如果做成的圆锥形小丑帽子的底面半径为10cm，那么这张扇形纸板的面积是 _____ cm^2 .



【答案】 240π

【解析】依题可知，这张扇形纸板的面积是为 $S = \pi Rl = 24 \times 10 \times \pi = 240\pi \text{ cm}^2$.

【标注】【知识点】求圆锥的侧面积

三、相似三角形

1. 相似三角形的定义

相似三角形的定义：形状相同的两个三角形叫做相似三角形。

2. 相似三角形的判定

相似三角形的判定：

- ① 平行于三角形一边的直线和其他两边相交，所构成的三角形与原三角形相似。
- ② 三边对应成比例的两个三角形相似。
- ③ 两边成比例且夹角相等的两个三角形相似。
- ④ 两角分别相等的两个三角形相似。

3. 相似三角形的性质

相似三角形的性质：

- 1、相似三角形的对应角 相等，对应边 成比例，都等于 相似比
- 2、相似三角形对应 中线 的比、对应 高线 的比、对应 角平分线 的比以及 周长 之比都等于相似比
- 3、相似三角形面积的比等于 相似比的平方

4. 相似三角形模型

反A字模型：

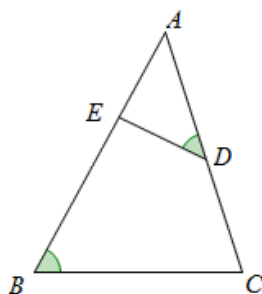


图1

图1中， $\angle ADE = \angle B$ ，则 $\triangle AED \sim \triangle ACB$ ， $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ 。

反“8”字模型：

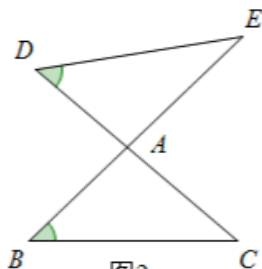


图2

图2中， $\angle B = \angle D$ ，则 $\triangle ABC \sim \triangle ADE$ ， $\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE}$ 。

双垂直模型：

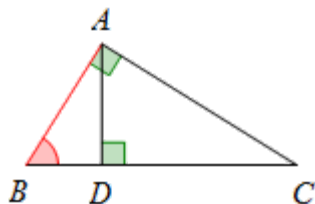


图2

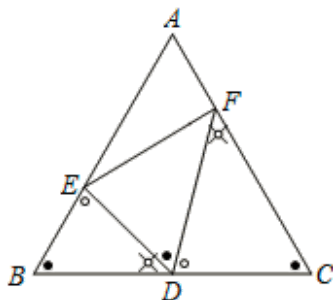
如图2， $\angle BAC = \angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ，则 $\triangle BAC \sim \triangle BDA \sim \triangle ADC$
 $\triangle BAC \sim \triangle BDA$ ， $\frac{AB}{BD} = \frac{BC}{AB}$ ，即 $AB^2 = BD \cdot BC$

$$\triangle BAC \sim \triangle ADC, \frac{AC}{DC} = \frac{BC}{AC}, \text{ 即 } AC^2 = DC \cdot BC$$

$$\triangle BDA \sim \triangle ADC, \frac{BD}{AD} = \frac{AC}{DC}, \text{ 即 } AD^2 = BD \cdot DC$$

同时利用等面积可知： $AB \cdot AC = BC \cdot AD$

以等腰三角形为背景的“一线三等角”相似模型：

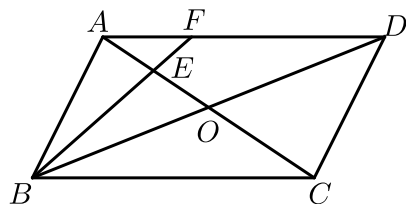


(1) 如图，在等腰 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = \angle EDF = \angle C$ ，则 $\triangle EBD \sim \triangle DCF$.

(2) 特别地，若点 D 是 BC 的中点，那么还有 $\triangle EBD \sim \triangle DCF \sim \triangle EDF$.

栗子

18. 如图，在平行四边形 $ABCD$ 中， AC ， BD 相交于点 O ，点 E 是 OA 的中点，连接 BE 并延长交 AD 于点 F ，已知 $S_{\triangle AEF} = 4$ ，则下列结论：① $\frac{AF}{FD} = \frac{1}{2}$. ② $S_{\triangle BCE} = 36$. ③ $S_{\triangle ABE} = 12$. ④ $\triangle AEF \sim \triangle ACD$ ，其中一定正确的是（ ） .



- A. ①②③④ B. ①④ C. ②③④ D. ①②③

【答案】D

【解析】 $\because$ 在四边形 $ABCD$ 中， $AO = \frac{1}{2}AC$ ，

$\because$ 点 E 是 OA 的中点，

$$\therefore AE = \frac{1}{3}CE,$$

$\because AD \parallel BC$ ，

$\therefore \triangle AFE \sim \triangle CBE$ ，

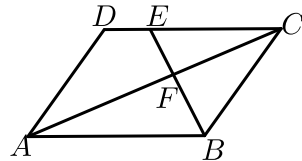
$$\therefore \frac{AF}{BC} = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{3},$$

$\because AD = BC$ ，

$$\begin{aligned}
&\therefore AF = \frac{1}{3}AD, \\
&\therefore \frac{AF}{FD} = \frac{1}{2}. \text{ 故①正确.} \\
&\therefore S_{\triangle AEF} = 4, \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BCE}} = \left(\frac{AF}{BC}\right)^2 = \frac{1}{9}, \\
&\therefore S_{\triangle BCE} = 36. \text{ 故②正确.} \\
&\therefore \frac{EF}{BE} = \frac{AE}{CE} = \frac{1}{3}, \\
&\therefore \frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle ABE}} = \frac{1}{3}, \\
&\therefore S_{\triangle ABE} = 12, \text{ 故③正确.} \\
&\therefore BF \text{ 不平行于 } CD, \\
&\therefore \triangle AEF \text{ 与 } \triangle ADC \text{ 只有一个角相等,} \\
&\therefore \triangle AEF \text{ 与 } \triangle ACD \text{ 不一定相似, 故④错误.}
\end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似8字型

19. 如图, 在平行四边形 $ABCD$ 中, 点 E 在 DC 上, 连接 BE 交对角线 AC 于点 F , 若 $DE:EC = 1:3$, 则 $S_{\triangle EFC}:S_{\triangle BFA} = \underline{\hspace{2cm}}$.



【答案】9:16

【解析】 $\because$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

$$\therefore AB \parallel CD, AB = CD.$$

$$\therefore DE:EC = 1:3.$$

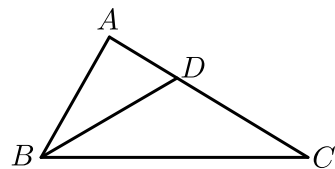
$$\therefore EC:AB = 3:4.$$

$$\therefore \triangle EFC \sim \triangle BFA.$$

$$\therefore \frac{S_{\triangle EFC}}{S_{\triangle BFA}} = \left(\frac{EC}{AB}\right)^2 = \frac{9}{16}.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

20. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 2\angle C$, BD 平分 $\angle ABC$, 且 $AD = \sqrt{2}$, $BD = 2\sqrt{2}$, 求 AB 的值.

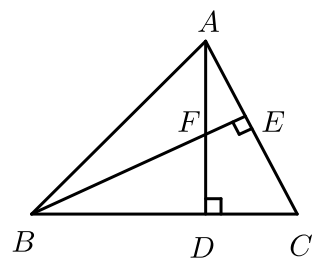


【答案】 $AB = \sqrt{6}$.

【解析】 $\because$ 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ABC = 2\angle C$, BD 平分 $\angle ABC$,
 $\therefore \angle ABD = \angle C = \angle CBD$,
 $\therefore CD = BD = 2\sqrt{2}$,
 $\therefore AC = AD + CD = \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$,
 $\because \angle A$ 是公共角,
 $\therefore \triangle ABD \sim \triangle ACB$,
 $\therefore AD : AB = AB : AC$,
 $\therefore AB^2 = AD \cdot AC = \sqrt{2} \times 3\sqrt{2} = 6$,
 $\therefore AB = \sqrt{6}$.

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

21. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $AD \perp BC$, $BE \perp AC$, 垂足分别为 D , E , AD 与 BE 相交于点 F .



- (1) 求证: $\triangle ACD \sim \triangle BFD$.
 (2) 当 $AD : BD = 1 : 2$, $AC = 3$ 时, 求 BF 的长 .

【答案】 (1) 证明见解析 .

(2) 6 .

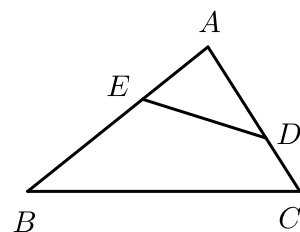
【解析】 (1) $\because AD \perp BC$, $BE \perp AC$,
 $\therefore \angle BDF = \angle ADC = \angle BEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle C + \angle DBF = 90^\circ$, $\angle C + \angle DAC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle DBF = \angle DAC$,
 $\therefore \triangle ACD \sim \triangle BFD$.

$$\begin{aligned}
 (2) \because \frac{AD}{BD} &= 1:2, \triangle ACD \sim \triangle BFD, \\
 \therefore \frac{AC}{BF} &= \frac{AD}{BD} = 1:2, \\
 \therefore AC &= 3, \\
 \therefore BF &= 6.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

栗子

22. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，点 D 、 E 分别为边 AC 、 AB 上的点，且 $\angle ADE = \angle B$ ， $AE = 3$ ， $AB = 8$ ，则 $AD \cdot AC = \underline{\quad}$ 。

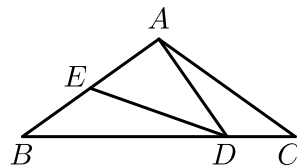


【答案】24

【解析】 $\because \angle ADE = \angle B$ ， $\angle A = \angle A$ ，
 $\therefore \triangle ADE \sim \triangle ABC$ ，
 $\therefore \frac{AE}{AC} = \frac{AD}{AB}$ ，
 $\therefore AD \cdot AC = AE \cdot AB = 24$ 。

【标注】【知识点】相似反A字型

23. 已知：如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 8$ ， D 、 E 分别为 BC 、 AB 边上一点， $\angle ADE = \angle C$ 。



- (1) 求证： $\triangle BDE \sim \triangle CAD$ 。
 (2) 若 $CD = 2$ ，求 BE 的长。

【答案】(1) 证明见解析。

$$(2) BE = 2.4.$$

【解析】(1) $\because AB = AC,$

$$\therefore \angle B = \angle C.$$

$$\because \angle ADE + \angle BDE = \angle ADB = \angle C + \angle CAD,$$

$$\angle ADE = \angle C,$$

$$\therefore \angle BDE = \angle CAD.$$

$$\therefore \triangle BDE \sim \triangle CAD.$$

$$(2) \text{ 由 (1) 知 } \triangle BDE \sim \triangle CAD, \therefore \frac{BD}{CA} = \frac{BE}{CD}.$$

$$\because AB = AC = 5, BC = 8, CD = 2,$$

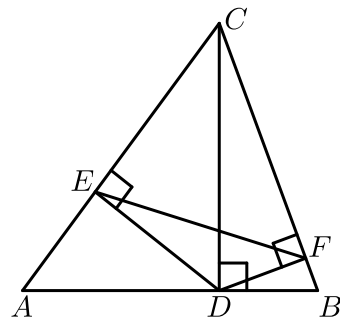
$$\therefore DB = BC - CD = 6.$$

$$\therefore BE = \frac{DB \times CD}{AC} = \frac{6 \times 2}{5} = 2.4.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合

24. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, $CD \perp AB$ 于 D , $DE \perp AC$ 于 E , $DF \perp BC$ 于 F .

求证: $\angle CFE = \angle A$.



【答案】证明见解析.

【解析】由射影定理可得 $CE \cdot CA = CD^2 = CF \cdot CB$ 即 $\frac{CE}{CB} = \frac{CF}{CA}$

$$\text{又} \because \angle ECF = \angle BCA,$$

$$\therefore \triangle CFE \sim \triangle CAB,$$

$$\therefore \angle CFE = \angle A.$$

【标注】【知识点】相似三角形的性质与判定综合